Unidad III

Lógica matemática

3.1 Lógica proposicional.

Una proposición es un enunciado declarativo que puede ser falso o verdadero, pero no ambos a la vez.

Ejemplos:

- Los unicos enteros positivos que dividen a 7 son 1 y el propio 7. (verdadero) ✓
- Una decada tiene 10 años. (verdadera) ✓
- La Tierra es plana. (falso) ✓
- 9 x 9 = 86. (falso) ✓
- La Tierra es el unico planeta en el Universo que tiene vida. (puede ser verdadera o falsa, pero no ambas) ✘
- Compre dos boletos para ir al concierto de Shakira el viernes. (no es verdadera ni falsa) ✘

3.1.1 Concepto de proposición

En lógica y filosofía, el término proposición es un tanto ambiguo y se usa para referirse a:

- Las entidades portadoras de los valores de verdad.
- Los objetos de las creencias y de otras actitudes proposicionales.
- Los referentes de las cláusulas-'que', como «Juan cree que el Sol es una estrella».
- El significado de las oraciones declarativas, como «el Sol es una estrella».

Es un producto lógico del pensamiento que se expresa mediante el lenguaje, sea éste un lenguaje común, cuando adopta la forma de oración gramatical, o simbólico, cuando se expresa por medio de signos o símbolos.

En Lógica tradicional se distinguen la proposición y el juicio, por cuanto la primera es el producto lógico del acto por el cual se afirma o se niega algo de algo, mientras ese acto constituye el juicio.

Para Aristóteles, la proposición es un discurso enunciativo perfecto, que expresa un juicio y significa lo verdadero y lo falso como juicio de términos y por eso es una afirmación categórica, es decir, incondicionada porque representa adecuadamente la realidad.

3.1.2 Proposiciones compuestas (Disyunción, Conjunción, Negación, Condicional, Bicondicional)

También denominadas moleculares. Son aquellas que están formadas por dos o más proposiciones simples unidas por los operadores lógicos.

Ejemplo:
1.- Fui al banco, pero el banco estaba cerrado.
2.- Los lectores de este libro son jóvenes o universitarios.
3.- Si el miércoles próximo me saco la lotería entonces te regalaré un auto.

Disyunción:
Se emplea la palabra "O" en el sentido inclusivo, como el y/o. Entonces una proposición del tipo "P o Q" se toma siempre como "P o Q ó ambas". Dado esto admitimos la frase compuesta como una proposición.
Simbólicamente la denotaremos escribiendo P v Q.
A esta nueva proposición compuesta se le llama Disyunción, de modo que la proposición P v q se llama disyunción de P y Q.

Ejemplo:

X es par o X es múltiplo de 5

A es par y B es par

Tabla de verdad

p	q	p v q
V|	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.1.3 Tablas de verdad

Una tabla de verdad, o tabla de valores de verdad, es una tabla que despliega el valor de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus componentes.

Se utiliza en lógica simbólica para establecer la validez de las proposiciones.

La construcción de tablas de verdad simplifica la tarea de determinar la verdad o falsedad de una proposición.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabla de verdad de la negación

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Para designarlas se emplean las letras latinas minúsculas: p, q, r, s, etc. Se emplea el símbolo~ de tal forma que ~p (se lee “no p”)

p	~p
V	F
F	V

Tabla de verdad de la conjunción

La conjunción de dos proposiciones simples p ^ q (que se lee “p y q”) es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas, la conjunción (^) es una conectiva lógica que se denomina el operador lógico AND y representa el producto lógico.

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad de disyunción

La disyunción de las propiedades simples p v q (que se lee: “p o q”) es falsa si ambas proposiciones son falsas. El operador lógico disyunción también se denomina OR y representa la suma lógica.

p	q	p v q
V	V	V

V	F	F
F	V	F
F	F	F

3.1.4 Tautologías, contradicción y contingencia)

Tautología:
Son identidades Lógicas, es decir, siempre verdaderas.

Se entiende por proposición tautológica, o tautología, aquella proposición que en todos los casos posibles de su tabla de verdad su valor siempre es V. Dicho de otra forma, su valor V no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la forma en que están establecidas las relaciones sintácticas de unas con otras.

Sea el caso:

$A \vee \neg A$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
V	F	V
F	V	V

Contradicción:
Se entiende por proposición contradictoria, o contradicción, aquella proposición que en todos los casos posibles de su tabla de verdad su valor siempre es F. Dicho de otra forma, su valor F no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la forma en que están establecidas las relaciones sintácticas de unas con otras.

Sea el caso:

$A \wedge \neg A$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
V	F	F
F	V	F

Contigencia:
Son ecuaciones lógicas, las cuales adquieren su valor de verdad para determinadas combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples.

Se entiende por verdad contingente, o verdad de hecho, aquella proposición que puede ser verdadera o falsa, según los valores de las proposiciones que la integran.

Sea el caso:

1	2	3	4	5
A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

$A \wedge (B \vee C)$

3.1.5 Equivalencias Lógicas

La lógica se conoce con frecuencia como álgebra de posiciones (en oposiciones al álgebra de los números reales).

Dos fórmulas lógicas son equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Teorema: Si dos fórmulas lógicas son equivalentes entonces la fórmula que se obtiene al operarlas con la bicondicional es una tautología.
Pasos para la realización de equivalencias
1.- Numerar los operadores del primer formula

p v ¬q v ¬r , p v (q → ¬r)

2.- Primeramente los paréntesis internos, seguido de las negaciones, posteriormente los operadores siguientes.

3.- Realizar el árbol. (IMG ARBOL)

4.- Se numeran las hojas del árbol de abajo hacia arriba de forma alfabética, se hace esto para las dos formulas. Primero la de la izquierda.

5.- Una vez terminado el árbol, proceder a hacer la tabla.

6.- Poner los encabezados de la tabla usando los números del árbol.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	q	r	¬q	¬r	¬q v ¬r	p v ¬q v ¬r	q → ¬r	p v (q → ¬r)
V	V	V						
V	V	F						
V	F	V						
V	F	F						
F	V	V						
F	V	F						
F	F	V						
F	F	F						

7.- Acomodar los valores de las hojas, siempre siguiendo el mismo orden.
8.- Poner los demás valores de la tabla utilizando las tablas de verdad.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	q	r	¬q	¬r	¬q v ¬r	p v ¬q v ¬r	q → ¬r	p v (q → ¬r)
V	V	V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

3.1.6 Reglas de inferencia

En lógica, especialmente en lógica matemática, una regla de inferencia es un esquema para construir inferencias válidas. Estos esquemas establecen relaciones sintácticas entre un conjunto de fórmulas llamados premisas y una aserción llamada conclusión. Estas relaciones sintácticas son usadas en el proceso de inferencia, por el que se llega a nuevas aserciones verdaderas a partir de otras ya conocidas. Las reglas también se aplican a la lógica informal y a las discusiones, pero la formulación es mucho más difícil y polémica. Como se mencionó, la aplicación de una regla de inferencia es un procedimiento puramente sintáctico. Sin embargo, debe también ser el válido, o mejor dicho, preservar la validez. Para que el requisito de preservación de la validez tenga sentido, es necesaria una cierta forma semántica para las aserciones de las reglas de inferencia y las reglas de inferencia en sí mismas.

3.1.7 Argumentos válidos y no válidos

Validez lógica

Dado el carácter formal de la Lógica como ciencia suele identificarse la expresión "validez lógica" con este aspecto lógico-formal.

Se dice que un razonamiento es lógicamente válido cuando tiene la forma de una **ley lógica**, lo que equivale a decir que la relación entre las premisas y la conclusión es tautológica.

Expresado en lenguaje formalizado: Dadas las proposiciones A, B, y C…. N, un argumento válido es aquel que tiene la forma:

(A /\ B /\ C…….. /\ N) → Z

Que recibe el nombre de **esquema de inferencia**, donde se da el caso que el valor de verdad lógica del antecedente V, como producto (conjunción) de todas las premisas, implica que la conclusión también tiene valor de verdad lógica V.

De este modo si las premisas son verdaderas en sentido epistemológico, entonces la conclusión también lo es, en sentido epistemológico. Lo que permite considerar Z como verdad propia, independiente y desligada, es decir una conclusión obtenida a partir de las verdades afirmadas en las premisas como verdaderas.

Por lo que definimos la validez como: **No puede ser el caso que siendo las premisas verdaderas la conclusión sea falsa**. Línea 1 de la tabla; es el caso de la tautología. La línea 2 de la tabla demostraría que el argumento no es válido. Las demás líneas no hacen al caso por ir en contra del supuesto de la verdad del producto de las premisas, lo que constituiría un argumento inconsistente, pues no se daría el caso de que todas las premisas fueran verdaderas a la vez. Este es el

argumento que, *a sensu contrario*, se usa para la prueba de validez que veremos más adelante; es decir que no es posible que si la conclusión es falsa, puedan ser todas las premisas a la vez verdaderas, que es lo que ocurre en la línea 2.
Ver tabla de valores de verdad

	A	**B**	**C**	**(A /\ B) → C**
1	V	V	V	V
2	V	V	F	F
3	V	F	V	V
4	V	F	F	V
5	F	V	V	V
6	F	V	F	V
7	F	F	V	V
8	F	F	F	V

Nota: La proposición metalingüística (A /\ B) representa el conjunto, producto lógico, de todas las premisas del argumento; C, representa el posible valor de verdad de la conclusión.
Consideración importante: Hay que tener en cuenta que **la validez reside en el esquema**, no en la verdad de las proposiciones. Las proposiciones no son válidas más que en el sentido epistemológico, como verdaderas, pero formalmente en sentido lógico pueden ser tanto verdaderas como falsas. Por lo que **la validez de un razonamiento sólo se garantiza cuando el conjunto de la proposición como esquema de inferencia es una tautología**, una verdad formal, cuya tabla de valores de verdad es siempre V y nunca F, evitando de esta manera la línea 2 de la tabla.
Si, se diera el caso de que alguna premisa fuera falsa, el valor de verdad del producto sería también falso. Sin embargo el argumento sería válido, con independencia de la verdad o falsedad de la conclusión. (Líneas 3-8).

Esto resulta a primera vista chocante, pero, según la definición del factor como condicional cuando el valor del antecedente es falso, la función hace verdadera a la proposición con independencia del valor de verdad del consecuente, según su tabla de verdad que lo define.

La paradoja no es tal, puesto que, cuando argumentamos, partimos de la base de la consideración de que todas las premisas son válidas, epistemológicamente verdaderas; en otro caso, la argumentación no tiene sentido.

Eso explica cómo, frecuentemente, usamos la segunda línea de la tabla de definición del factor implicado en expresiones como:

“Si eso que dices es verdad, yo soy el Papa de Roma”, donde damos a entender que, al no dar validez a la premisa, la conclusión puede ser cualquiera como argumento válido, pero epistemológicamente falso.

En la lógica clásica, se decía, *ex contradictione cuodlibeto*, lo que viene a decir, que partiendo de una falsedad, cualquier conclusión es posible. Algunos cálculos utilizan esta inferencia como regla para demostrar algo conocido de antemano como falso.
Por eso en lógica se hace una distinción entre la afirmación condicional o hipotética y la implicación.

Prueba de validez de un argumento
Supongamos el siguiente argumento:

p–> (q/\r); p; p–>(s/\t) |- q/\s

Su esquema de inferencia sería:

[p → (q /\ r) /\ p /\ p → (s /\ t)] → (q /\ s)
Podríamos comprobar si es o no válido de las tres formas siguientes:

Por tablas de verdad
a) Al hacer la tabla veríamos las condiciones de verdad de cada una de las premisas y su posible o imposible conjunción, es decir, su consistencia.

b) Al mismo tiempo podemos comprobar si se da el caso en que siendo el antecedente verdadero, todas y cada una de las premisas verdaderas, el consecuente fuera falso. De no ser así el esquema daría como resultado una tautología y mostraría que el argumento es válido.

El inconveniente es que con 5 variables tendríamos que hacer una tabla bastante larga y farragosa. La tabla tendría $2^5 = 32$ líneas.
Por demostración o derivación según las reglas de un cálculo lógico
Aplicando las reglas derivaríamos la conclusión a partir de las premisas. Si es posible, entonces comprobaríamos la validez del argumento.

Pero no siempre es fácil la derivación o, si el argumento es complicado, podría llevarnos mucho tiempo el intentarlo, para tal vez no llegar a una conclusión. No interesa en ese caso embarcarse en el cálculo sin garantía de que se vaya a llegar a buen fin.

Por la prueba de validez
Sea el argumento: p–> (q/\r); p; p–>(s/\t) |- (q/\s)

Comprobamos que no puede darse el caso de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Para ello suponemos los valores de verdad de las premisas que hagan que la conclusión sea falsa; y sustituimos dichos valores en los valores de las premisas.

Deberá aparecer una imposibilidad de que dichos valores hagan verdaderas a todas las premisas. Deberá aparecer una contradicción. Si dicha contradicción aparece, quiere decir que el argumento es válido.

3.1.8 Demostración formal (Directa, Por contradicción)

Demostración por contradicción y por inducción
Una demostración por contradicción se realiza suponiendo que p es verdadera y q es falsa y empleando p y q, axiomas, definiciones y teoremas establecidos previamente, se deduce una contradicción.

NOTA: La única diferencia entre la hipótesis en la demostración directa y la demostración por contradicción es la negación de la contradicción.
EJEMPLOS:
Pruebe presentado una prueba por contradicción que si X * Y = 0, entonces X= 0 o bien Y = 0. Suponga que si a, b y c son números reales con a * b = a * c y a ≠ o, entonces b = c;

Resolución

XY = 0 entonces x ≠ 0 o bien Y ≠ 0;

Con X ≠ 0 entonces XY = X*0 = 0

Siendo a = X, b = Y, C = 0 ab= ac entonces XY = X * 0 con x ≠ 0 entonces concluimos que Y = 0.

El procedimiento de la demostración por contradicción es semejante a la que se realizó por el método directo con la diferencia de que las líneas iniciales de dicha demostración no son únicamente las hipótesis, sino además se incluye en la demostración una línea con la negación de la conclusión. Por otro lado el objetivo de la demostración es llegar a una contradicción.

3.2 Lógica de predicados.

A diferencia de cálculo de proposiciones en cálculo de predicados utilizamos variables, dentro de este tema consideramos las expresiones booleanas que se definieron como proposiciones abiertas.

En cálculo de predicados tenemos elementos más simples para formar las expresiones atómicas, a diferencia de una proposición simple donde su valor es verdadero o falso de acuerdo a una interpretación, en cálculo de predicados el valor de verdad depende de los componentes que forman el predicado. Por ejemplo: Juan es padre de Pedro es una expresión en cálculo de predicados, que en general podría ser: x es padre de y, o simplemente p(x, y).

En otras palabras tenemos aquí una proposición abierta que depende de dos variables, y que por supuesto el valor de verdad depende de los valores que le demos a las variables, porque por ejemplo: Luis es padre de Agustín puede tener un valor de verdad diferente al anterior.

En general podemos decir que un predicado puede tener una o más variables y que las variables pueden tomar valores de un conjunto específico llamado DOMINIO.

Así por ejemplo las dos expresiones mencionadas anteriormente son de la forma p(x, y) donde el predicado p representa “es padre de” y el domino es el conjunto de las personas.

3.2.1 Cuantificadores

Existen dos tipos de cuantificadores:

Una cuantificación existencial   es verdadera respecto a la interpretación dada, si hay al menos un individuo en el universo de esa interpretación, tal que q es verdadera respecto a esa interpretación y respecto a ese individuo.

NOTA: El cuantificador universal utiliza el descriptor todo o nada, es decir se refiere a todas las acciones que engloban al universo;
EJEMPLO:

Todos los miembros del equipo los Cafés de Calkiní son jugadores de Baseball

Ningún hecho violento merece ser visto

Una cuantificación universal es verdadera respecto a la interpretación dada, si para todos los individuos en el universo de esa interpretación, q es verdadera respecto a esa interpretación y respecto a cada uno de ellos.

NOTA: El cuantificador existencial utiliza el descriptor algún c1 está en C2, o algún C1 no está en C2, es decir se refiere a que algunos elementos pueden pertenecer o no al conjunto.

3.2.2 Representación y evaluación de predicados

En el Cálculo de Predicados se usan varios tipos de símbolos:

- SÍMBOLOS DE FUNCIÓN: Funciones que definen nuevos individuos en términos de los previamente conocidos
  Ejemplos:

  Mas (x, y)
  padre (x)

- SÍMBOLOS DE PREDICADOS: Predicados que describen un conjunto de individuos que tienen una propiedad o relación
  Ejemplos:

  MAYOR (más(x, 1), x)

- CONSTANTES. Mantienen la propiedad de todo elemento constante.
  Ejemplos:

  CASA, MARÍA

- SÍMBOLOS DE VARIABLES. Individuos que pertenecen a un dominio no vacío o conjunto
  Ejemplos:

  x, y

En Cálculo de Predicados, nos referimos a términos cuando hablamos de constantes, variables o símbolos de función, cuyos elementos sabemos de antemano que son términos. Así, por ejemplo, la variable x y la constante 1 son términos. Dado el símbolo de función más de dos argumentos, las siguientes expresiones también son términos:

Más (x, 1)
más (más(x, 1 ,1)

El primero de ellos se refiere a la suma x +1, mientras que el segundo a la suma de los términos correspondientes a x+1 con el término 1.

Como para el caso del Cálculo de Proposiciones, se usan también átomos en el Cálculo de Predicados, los cuales son enunciados simples (es decir predicados), que están conformados con símbolos de predicados, con varios términos como argumentos y que pueden ser evaluados como V (verdaderos) o F (falsos), de manera que no pueden ser descompuestos en proposiciones más simples. De esta manera las siguientes expresiones son átomos:

MAMÍFERO(x)
MORTAL (LASSIE)
ES_TIO (JUAN, JOSE)
ES_NIETO (PANCHO_VILLA, PEDRO_CASISTRANINI)

Es decir, se puede definir término de la siguiente manera:

Además se trata con formas proposicionales, estructuras que aparecen como sentencias declarativas, pero que no tienen valores definidos de verdad a causa de las variables individuales.

Ejemplo:

- 2+3=4   Es una proposición
- X+3=4   Es una forma proposicional, ya que será proposición cuando x tome algún valor del dominio

Recibe el nombre de Cálculo de Predicados de Primer Orden por tener cuantificadores sólo sobre el dominio de individuos.

NOTA:
El cálculo de predicado está formado por un conjunto de predicados concatenados a través de operaciones lógicas.

Igualmente dentro del cálculo de Predicados se utilizan las siguientes simbologías:

E Existe: Para todo A

Ejemplo:

Sea el   enunciado:

Todos los mamíferos son de sangre caliente.

Expresado usando la simbología del predicado se tiene:

A Mamíferos (X) –> Sangre caliente (X)